

# Algoritmi i strukture podataka

kvalifikacije za Elektrijadu 2023

## Zadatak 1

Posedujemo  $N$  izgledom identičnih novčića, od kojih su  $N-1$  ispravni i iste težine, a jedan je falš i različite je težine od ostalih (nepoznato je da li je lakši ili teži).

Ukoliko možemo uraditi najviše  $K$  merenja na vagi sa dva tase, koji je najveći broj novčića za koje možemo sigurno tvrditi da su ispravni?

Primer: Ukoliko je  $N=6$  i  $K = 2$ , najviše za 4 novčića možemo tvrditi da su ispravni. Npr. u prvom merenju možemo staviti novčiće  $\{1,2\}$  na levi i  $\{3,4\}$  na desni tas. Ukoliko vaga ostane u ravnoteži, svi  $\{1,2,3,4\}$  su ispravni, i drugim merenjem bismo mogli utvrditi i 5. ispravni novčić. Međutim, ukoliko vaga recimo prevagne na levu stranu, onda je ili među  $\{1,2\}$  teži falš novčić, ili među  $\{3,4\}$  lakši falš novčić, a što garantuje da su novčići  $\{5,6\}$  ispravni. U drugom merenju možemo uporediti novčiće  $\{1,2\}$  i  $\{5,6\}$ , ako je vaga u ravnoteži, onda su i  $\{1,2\}$  ispravni novčići, a ukoliko prevagne na levo onda je među  $\{1,2\}$  falš, pa su onda i  $\{3,4\}$  ispravni, i opet smo zaključili koja su 4 ispravna. Može se pokazati da ne postoje drugačija merenja kojima bismo odredili svih 5 ispravnih novčića.

**Za dati broj novčića i merenja, ispisati koliko najviše ispravnih možemo odrediti:**

a)	3 poena	$N = 23, K = 2$
b)	4 poena	$N = 2023, K = 3$
c)	5 poena	$N = 2023, K = 9$

## Zadatak 2

Dane su funkcije:

$$f(x) = 2 \cdot x + 1$$

$$g(x) = 2 \cdot x - 1$$

Naći neku kompoziciju ovih funkcija, tako da broj 1 preslikamo u zadati broj  $T$ .

Kompozicija predstavlja neki broj "ugnježenih funkcija",

npr.  $f(g(g(f(f(1))))) = f(g(g(f(3)))) = f(g(g(7))) = f(g(13)) = f(25) = 51$

Primer: Za  $T = 13$ , jedno od mogućih rešenja je  $g(f(f(1)))$ .

**Ispisati kompoziciju funkcija za dato  $T$ :**

a)	1 poen	$T = 23$
b)	3 poena	$T = 2023$
c)	6 poena	$T = 20232023$

### Zadatak 3

Postoji  $N$  različitih vrsta slatkiša, i za svaku vrstu je dat broj koliko slatkiša te vrste imamo - ove brojeve ćemo predstaviti kao niz  $C$ . Paketić se sastoji od  $K$  slatkiša, a svi slatkiši u paketiću moraju biti različite vrste. Koji je najveći broj paketića koji možemo napraviti?

Primer: Za  $N = 3$ ,  $C = [2, 3, 4]$ , i  $K = 2$ , najviše možemo napraviti 4 paketića. Npr. jedna od mogućih raspodela su paketići koji sadrže slatkiše:  $\{1, 3\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{2, 3\}$ ,  $\{2, 3\}$ . Ne postoji raspored kojim je moguće napraviti 5 paketića.

**Ispisati najveći broj paketića koje možemo napraviti za date vrednosti:**

a)	5 poena	$N=4, K=3, C = [20, 30, 40, 50]$
b)	3 poena	$N=2023, K=2, C=[1, 2, 3, 4, \dots, 2023]$ (svi brojevi redom od 1 do 2023)
c)	8 poena	$N=10, K=5, C=[67, 744, 823, 259, 42, 593, 892, 994, 331, 364]$

### Zadatak 4

**Napomena:** Na ovom zadatku možete dobiti poene i ukoliko nemate optimalno rešenje. Obratite pažnju na bodovanje u primerima.

- a) Na šahovsku tablu dimenzija  $8 \times 8$  rasporediti 2 topa i 3 kraljice tako da ukupan broj napadnutih polja bude što veći. Kraljica napada sva polja po horizontali, vertikali i dijagonalama gde se nalazi. Top napada polja po horizontali i vertikali. Polje je napadnuto ukoliko ga bar jedna figura napada. Figure blokiraju druge figure pri napadanju polja (npr. ako se kraljica nalazi na polju A1, a top na B2, polje C3 nije napadnuto od strane ove dve figure).

Bodovanje: Ukoliko je broj napadnutih polja  $K$ , a u optimalnom rešenju je  $M$ , broj poena koje ćete dobiti za ovaj primer je:  $\max(0, 16 - 5 * (M - K))$

U rešenju na poljima gde su topovi upisati T, a na poljima gde su kraljice upisati K.

- b) Na šahovsku tablu dimenzija  $8 \times 8$  rasporediti što više lovaca, tako da nijedna dijagonala ne sadrži više od 3 lovca.

Bodovanje: Ukoliko je broj raspoređenih lovaca  $K$ , a u optimalnom rešenju je  $M$ , broj poena koje ćete dobiti za ovaj primer je:  $\max(0, 12 - (M - K))$

U rešenju na poljima gde su lovci upisati X.

## Zadatak 5

**Napomena:** Na ovom zadatku možete dobiti poene i ukoliko nemate optimalno rešenje. Obratite pažnju na bodovanje.

Robot se nalazi u matrici brojeva na gornjem levom polju. Može se kretati na susedna polja (dole, gore, levo, desno), tako da ne sme nikad stati na isti broj dva puta. Robot treba da stigne do donjeg desnog ugla, a da pritom pređe preko što više polja.

Ispišite niz komandi (D - dole, U - gore, L - levo, R - desno) kojima se robot kreće.

Bodovanje: Ukoliko napravite validan niz komandi dužine  $X$ , broj poena koje ćete osvojiti je  $\max(0, P - A * (M - X))$ , gde su parametri  $P$ ,  $A$ , i  $M$  dati po primerima.

1	3	1
4	2	7
3	5	6

Primer: Za matricu koja se nalazi levo, optimalan niz komandi bi bio: DDRURD, prolazeći redom kroz polja koja sadrže brojeve: 1,4,3,5,2,7,6.

**Ispisati niz komandi za sledeće matrice:**

**a)**  $P=7, A=3, M=18$

1	5	1	7	13	14
2	1	11	12	19	14
4	6	13	17	18	8
2	10	7	9	15	16
12	3	5	6	19	9
16	15	4	18	10	17

**b)**  $P=10, A=3, M=30$

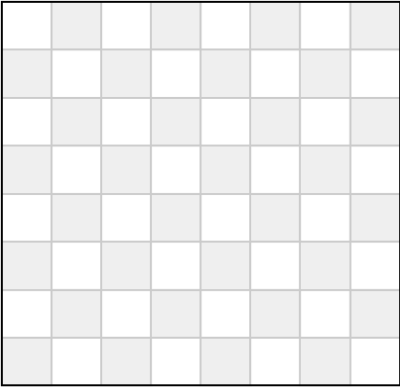
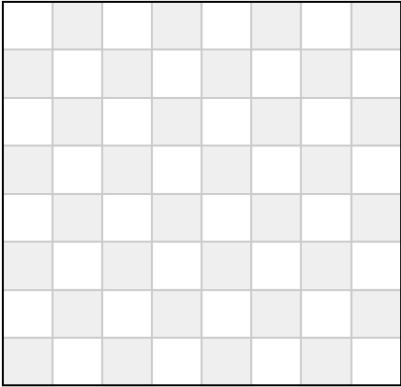
1	10	10	14	22	12	19	13
20	23	28	5	10	6	17	12
21	27	8	23	3	30	25	29
20	16	9	31	18	22	29	9
4	15	3	6	28	19	14	1
25	11	18	7	26	24	7	27
2	22	26	15	2	4	30	31
17	16	21	5	11	8	11	24

**c)**  $P=17, A=4, M=30$

1	31	11	13	29	21	21	10
15	29	7	10	19	9	1	16
6	14	19	4	3	5	23	25
18	27	12	26	9	25	15	5
22	13	11	28	23	30	16	10
8	2	18	3	20	30	2	30
31	22	17	31	28	12	8	27
20	4	17	26	24	7	6	14

# List za odgovore

Ime i prezime, indeks: \_\_\_\_\_

1.	a)		3		
	b)		4		
	c)		5		
2.	a)		1		
	b)		3		
	c)		6		
3.	a)		5		
	b)		3		
	c)		8		
4.		a)	b)		
				16	
				12	
5.	a)		7		
	b)		10		
	c)		17		
			$\Sigma$		